MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 6
27.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“

1. Geben Sie jeweils die Menge

   a) $$L = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\} \;\middle|\; \frac{2}{x-1} - \frac{x-2}{x+3} \leq -1 \right\}$$

   b) $$L = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\middle|\; x + \frac{3}{|x|} \leq |x+1| \right\}$$

   mit geeigneten Intervallen an und skizzieren Sie diese auf der Zahlengeraden.

2. Es sei $(K, +, \cdot, <)$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie (ausführlich, unter Verwendung der Anordnungsaxiome) für alle $a, b \in K$ und alle $\varepsilon \in K^+$:

   a) $|a - b| = |b - a|$.

   b) $|a| = |b| \iff a = \pm b \iff a^2 = b^2$.

   Hinweis: $a = \pm b$ ist eine Kurzschreibweise für $(a = b) \vee (a = -b)$.

   c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ sowie $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ für $b \neq 0$.

   d) $|a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a < \varepsilon$.

3. In den reellen Zahlen sei die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$ und $b^2 - 4ac \geq 0$ gegeben. Leiten Sie die bekannte Lösungsformel

   $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

   her. Was ist im Fall $b^2 - 4ac < 0$?
   Tip: Teilen Sie beide Seiten der Gleichung durch a und wenden Sie quadratische Ergänzung zur binomischen Formel an! Es ist dann $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = (x + \frac{b}{2a})^2$.

4. Die Menge $K = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ ist mit der durch die folgenden Tafeln definierten Verknüpfungen "+" und "·"

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

und

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

ein Körper mit dem Nullelement $\overline{0}$ und dem Einselement $\overline{1}$.

a) Wie sieht man aus den Tafeln, daß die Kommutativitätsgesetze gelten? Und wie erkennt man die neutralen Elemente, und wie sieht man, ob zu einem Element ein inverses Element existiert?

b) Weisen Sie das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ für alle $a, b, c \in K$ anhand der Verknüpfungstafeln nach.

c) Zeigen Sie durch einen Widerspruchsbeweis, daß es **kein** “$<$“ auf K gibt, so daß $(K, +, \cdot, <)$ ein angeordneter Körper wird.

Für die Tutorien vom 27.11. bis 29.11.19